

Міністерство освіти і науки України  
Національний університет «Львівська політехніка»  
кафедра інформаційних систем та мереж

Віктор ГРИГОРОВИЧ

# Алгоритмізація та програмування

## Частина 4

Динамічні та рекурсивні структури даних  
Програми та модулі

СЕРІЯ «КОМП'ЮТИНГ»

## Навчальний посібник

Для студентів, що навчаються за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти спеціальностей F4 «Системний аналіз та наука про дані» та F6 «Інформаційні системи і технології»

За науковою редакцією д.т.н., професора Володимира ПАСІЧНИКА

Формули, цитати, тексти перекладів, ілюстрації, цифровий та інший фактичний матеріал і бібліографічні відомості перевірено, зауваження рецензентів ураховано.

Видавництво «Магнолія»

Львів

УДК 004.421 (075.8)

*Відтворення цієї книги або будь-якої її частини заборонено без письмової згоди видавництва. Будь-які спроби порушення авторських прав будуть переслідуватися у судовому порядку.*

*Рекомендовано до друку та видання з грифом Науково-методичної ради  
Національного університету «Львівська політехніка»  
як навчальний посібник для здобувачів вищої освіти спеціальностей  
F4 «Системний аналіз та наука про дані» та F6 «Інформаційні системи і технології»  
(Протокол № 4/2026 від 22 квітня 2026 р.)*

### Рецензенти

Андрій ПУКАС, доктор техн. наук, проф., завідувач кафедри комп'ютерних наук Західноукраїнського національного університету.

Дмитро УГРИН, доктор техн. наук, проф., професор кафедри комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Юрій РИШКОВЕЦЬ, канд. техн. наук, доц., доцент кафедри інформаційних систем та мереж Національного університету «Львівська політехніка».

**Г83 Алгоритмізація та програмування. Частина 4: Динамічні та рекурсивні структури даних. Програми та модулі.** Навчальний посібник для студентів, що навчаються за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти, спеціальностей F4 «Системний аналіз та наука про дані» та F6 «Інформаційні системи і технології». / Укл.: Григорович Віктор Геннадійович – Львів: Видавництво "Магнолія" – 298 с.

**ISBN 978-617-574-343-0**

Навчальний посібник присвячений вивченню програмування мовою C++.

У розділі «Динамічні та рекурсивні структури даних» розглядаються теми, що стосуються опрацювання стеків, черг, лінійних однонаправлених та двонаправлених списків, кільцевих списків, бінарних дерев, хеш-таблиць та функціональних типів даних.

У розділі «Програми та модулі» описано принципи організації багатомодульних проєктів, відокремлення інтерфейсу від реалізації модуля, а також директиви препроцесора та роботу з просторами імен.

В посібнику містяться теоретичні відомості, приклади, методичні вказівки з їх розв'язування, питання і завдання з контролю знань.

ISBN 978-617-574-343-0

УДК 004.421 (075.8)

© Віктор ГРИГОРОВИЧ

© Видавництво "Магнолія"

## Зміст

Передмова наукового редактора серії підручників та навчальних посібників «КОМП'ЮТИНГ».....	4
Вступ.....	11
Розділ 11. Динамічні та рекурсивні структури даних .....	14
11.1. Теоретичні відомості .....	14
11.1.1. Загальні поняття .....	14
11.1.2. Списки .....	35
11.1.3. Деревя .....	103
11.1.4. Хеш-таблиці .....	234
11.1.5. Вказівники на функції та функціональні типи даних.....	241
11.2. Питання та завдання для контролю знань.....	255
Питання та завдання з теми «Динамічні та рекурсивні структури даних»	255
Задачі з теми «Динамічні та рекурсивні структури даних».....	261
Питання та завдання з теми «Вказівники на функції та функціональні типи даних».....	265
Розділ 12. Програми та модулі.....	266
12.1. Теоретичні відомості .....	266
12.1.1. Поняття та необхідність модулів .....	266
12.1.2. Директиви препроцесора.....	267
12.1.3. Відокремлення інтерфейсу від реалізації .....	276
12.1.4. Простори імен .....	279
12.2. Питання та завдання для контролю знань.....	282
Макроси. Директиви препроцесора.....	282
Програми та модулі. Директиви препроцесора. Простори імен .....	286
Предметний покажчик .....	292
Література .....	295

# **Передмова наукового редактора серії підручників та навчальних посібників «КОМП'ЮТИНГ»**

*Шановний читачу!*

Започатковуючи масштабний освітньо-науковий проект підготовки і видання серії сучасних підручників і навчальних посібників під загальною назвою «КОМП'ЮТИНГ» та із загальним методичним патронуванням його Інститутом інноваційних технологій та змісту освіти МОН України, мені як ініціатору та науковому керівнику неодноразово доводилось прискіпливо аналізувати загальну ситуацію в царині сучасного україномовного підручника комп'ютерно-інформатичного профілю. Загалом, позитивна тенденція останніх років ще не співмірна з надзвичайно динамічним розвитком як освітньо-наукової та виробничої сфери комп'ютингу, так і стрімким розширенням потенційної цільової читацької аудиторії цього профілю. Іншими словами, попередній аналіз засвідчує наявність значного соціального замовлення під реалізацію пропонованого вашій увазі проекту.

Ще одним фактором формування освітньо-наукової ініціативи, пропонованої групою відомих вітчизняних науковців-педагогів та практиків, які організують наукові дослідження, готують фахівців та провадять бізнес в галузі комп'ютингу, постало завдання широкомасштабного включення Української вищої школи до загальноєвропейських і всесвітніх об'єднань, структур і асоціацій. Виконуючи функцію науково-технічного локомотиву суспільства, галузь комп'ютингу невідворотно зобов'язана зіграти роль активного творця загальної освітньо-наукової платформи, яка має бути методологічно-об'єднувачою та професійно-інтеграційною основою для багатьох сфер людської діяльності.

Третім суттєвим фактором, який спонукав започаткувати пропоновану серію підручників і навчальних посібників, є об'єктивно визріла ситуація, коли фахівцям та науковцям треба подати чіткий сигнал щодо науково-методологічного осмислення та викладення базових знань галузі комп'ютингу як освітньо-наукової, виробничо-економічної та сервісно-обслуговувальної сфери.

Читаць, безсумнівно, зверне увагу на нашу послідовну промоцію нового терміну «КОМП'ЮТИНГ» (computing, англ.), який є вдалим та комплексно узагальнювальним для означення галузі знань, науки, виробництва, надання відповідних послуг та сервісів, видається доречним подати ретроспективу як самого терміну комп'ютинг, так і широкої освітньої, наукової, бізнесової та виробничої сфери діяльності, що іменується комп'ютигом.

Уперше термін «комп'ютинг» уведений 1998 р. Яном Фостером з Арагонської національної лабораторії Чиказького університету та Карлом Кесельманом з Інституту інформатики штату Каліфорнія (США) та запропонований для означення комплексної галузі знань, яка включає проектування та побудову апаратних і програмних систем для широкого кола застосувань: вивчення процесів, структур і керування інформацією різних видів; виконання наукових досліджень із застосування комп'ютерів та їх інтелектуальності; створення і використання комунікаційних та демонстраційних засобів, пошуку та збирання інформації для конкретної мети і т. ін.

У подальшому сфера використання терміну суттєво розширилась, зокрема, в освітньо-науковій царині його почали використовувати для означення відповідної галузі знань, для якої періодично (орієнтовно щодесять років) провідними університетами та професійними асоціаціями фахівців розробляються та імплементуються навчальні плани і програми, котрі в подальшому набувають статусу міжнародно визнаних освітньо-професійних стандартів. Зокрема, варто акцентувати увагу на версіях підсумкового документу «Computing CURRICULA» 2001 р. За окремими повідомленнями можна стверджувати, що черговий збірник стандартів «Computing CURRICULA» буде поданий професійному загалу до 2011 р. Перше організаційне засідання відповідних фахових робочих груп відбулось у Чиказькому університеті влітку 2007 р.

Для формування цілісного однорідного подання суті «КОМП'ЮТИНГУ» ми базуємось на сучасних наукових уявленнях з максимально можливим строгим покомпонентним викладенням основних базових означень та понять, які склались історично і є загальноновизнаними в професійних колах. Водночас для побудови цілісної зваженої картини ми використали певні узагальнення та загальносистемні класифікаційні підходи.

Безсумнівно, що базовим та фундаментальним поняттям було, є і залишається поняття ІНФОРМАТИКИ (informatique – франц.) як фундаментальної науки, котра вивчає найбільш загальні закони та закономірності процесів відбору, реєстрації, збереження, передавання, захисту, опрацювання та подання інформації. Як фундаментальна наука інформатика була подана в 70-х рр. ХХ ст. При цьому хочу відразу ж застерегти від примітивного ототожнення, яке часто є наївно вживаним щодо еквівалентності понять «інформатика» (informatique – франц.) та «комп'ютерні науки» (computer science – англ.). Такі ототожнення, з певною мірою наближення, можливі щодо розширеного сучасного трактування інформатики як загалом прикладної науки про обчислення, збереження, опрацювання інформації та побудову прикладних інформаційних технологій і систем на їх базі. Таке трактування є характерним в ряді європейських країн. Строге ж означення та подання предмету досліджень інформатики, а саме – інформації, має справу з фундаментальним не редукованим поняттям і фіксується у словниках як «informatio» (лат.) – відомості, повідомлення. Вивченням та всестороннім аналізом сутності інформації опікується наука, що називається «теорія інформації». На нашу думку, основною принциповою відмінністю між інформатикою та комп'ютерними науками є те, що перша в своєму первинному поданні відноситься до категорії фундаментальних наук, як то фізика, математика, хімія і т. ін. У той же час комп'ютерні науки загалом за своєю сутнісною природою та всіма наявними ознаками належать до категорії прикладних наук, які базуються на фундаментальних законах та закономірностях інформаційних процесів, котрі вивчаються в рамках фундаментальної науки інформатики.

Особливо наголосимо на тому, що фундаментальна наука та її результати не призначені для безпосереднього промислового використання.

Для комп'ютерних наук характерною ознакою виділення їх у спектрі прикладних наук є об'єкт прикладення знань, умінь та навичок у контексті конкретного об'єкту – обчислювача (комп'ютера). Іншою відокремленою прикладною науковою галуззю, що базується на підвалинах інформатики, є розділ прикладних наук, основним об'єктом яких є сам процес обчислень. Це науки, які іменуються обчислювальними науками – «computationally science»

(англ.). Традиційно сюди відносять обчислювальну та комп'ютерну математику.

Третьою прикладною науковою галуззю, яка ґрунтується на фундаментальних законах інформатики, є розділ прикладних наук, основним об'єктом яких є інформаційний ресурс (у сучасній літературі часто вживається поняття «контент» (content, англ.) у розумінні інформаційного наповнення. Ці прикладні науки одержали назву «інформаційні науки» (information science, англ.).

У галузі прикладних інформаційних наук базовий об'єкт досліджень, а саме інформаційний ресурс, подається, як правило, у формі даних та знань. За спрощеною формулою означатимемо дані як матеріалізовану інформацію, тобто інформацію, яку подано на матеріальних носіях, знання як суб'єктивізовану інформацію, тобто інформацію, яка природно належить суб'єкту, і в традиційному розумінні перебуває в людській пам'яті.

Узагальнюючи класифікаційно-ознакову схему, стверджуємо, що на базі фундаментальної науки ІНФОРМАТИКИ формуються три прикладні наукові галузі, а саме: комп'ютерні науки, обчислювальні науки та інформаційні науки з відповідними об'єктами досліджень у своїх сферах.

Ще раз підкреслимо, що результати фундаментальних наукових досліджень не призначені для безпосереднього промислового використання, у той же час результати прикладних наукових досліджень, як правило, призначені для створення та удосконалення нових технологій.

Гносеологічний аналіз подальшого формування інженерного рівня сфери КОМП'ЮТИНГУ невідворотно веде до структурного подання базових типів інженерій, які трактуються у класичному розумінні. ІНЖЕНЕРІЯ (майстерний – від лат. ingeniosus) – це наука про проектування та побудову (чит. створення) об'єктів певної природи. У цьому контексті природними для сфери «КОМП'ЮТИНГУ» є декілька видів інженерії.

Мова йтиме про:

- КОМП'ЮТЕРНУ ІНЖЕНЕРІЮ (computer engineering, англ.), яка охоплює проблематику проектування та створення об'єктів комп'ютерної техніки;

- ПРОГРАМНУ (software engineering, англ.), яка опікується проблематикою проектування та створення об'єктів, що іменуються програмними продуктами;
- ІНЖЕНЕРІЮ ДАНИХ ТА ЗНАНЬ (data & knowledge engineering, англ.), інженерію, яка опікується проектуванням та створенням інформаційних продуктів;
- інженерію, яка опікується проектуванням та створенням міжкомпонентних (інтерфейсних) взаємозв'язків та формуванням цілісних системних об'єктів, усе частіше іменують СИСТЕМНОЮ ІНЖЕНЕРІЄЮ (systems engineering, англ.).

У разі такого структурно-класифікаційного подання видів інженерій сфери комп'ютерингу, зазначимо, що кожен з них у цьому трактуванні є «відповідальним» за певний тип забезпечення, а саме: апаратного (hardware, англ.), програмного (software, англ.), інформаційного (dataware, англ.) та міжкомпонентного (middleware, англ.). Інформаційну технологію (ІТ) можна трактувати як певну точку в чотирирівимірному просторі зазначених інженерій. При цьому необхідно обов'язково зважити на певну частку наближення та інтерпретації цього простору як дискретного та неметричного.

У зв'язку з поширеним різночитанням та трактуванням поняття інформаційної технології (ІТ), видається необхідним детальніше подати сутнісну структуру цього терміну, використовуючи при цьому термінологічні статті популярного інформаційного ресурсу, яким є Wikipedia – [<http://www.wikipedia.org/>].

Технологія (від грецького *techne* – мистецтво, майстерність, вміння та грецького *logos* – знання) – сукупність методів та інструментів для досягнення бажаного результату, спосіб перетворення чогось заданого в необхідне. Технологія – це наукова дисципліна, в рамках якої розробляються та удосконалюються способи й інструменти виробництва.

У широкому розумінні – це знання, які можна використати для виробництва продуктів (товарів та послуг) з економічних ресурсів. У вузькому розумінні – технологія подається як спосіб перетворення речовини, енергії, інформації в процесі виготовлення продукції, обробки та переробки матеріалів, складання готових виробів, контроль якості та керування.

Технологія включає в себе методи, прийоми, режими роботи, послідовість операцій та процедур. Вона тісно взаємопов'язана із засобами, що застосовуються, обладнанням, інструментами, використовуваними матеріалами. За методологією ООН – технологія в чистому вигляді охоплює методи та техніку виробництва товарів і послуг (dissembled technology, англ.). Втілена технологія охоплює машини, обладнання, споруди, виробничі системи та продукцію з високими техніко-економічними параметрами (embodied technology, англ.). Матеріальна технологія (МТ) створює матеріальний продукт. Інформаційна технологія (ІТ) створює інформаційний продукт на основі інформаційних ресурсів.

Інформаційні технології використовують комп'ютерні та програмні засоби для реалізації процесів відбору, реєстрації, подання, збереження, опрацювання, захисту та передавання інформації – інформаційного ресурсу у формі даних та знань – з метою створення інформаційних продуктів.

Аналітична картина видаватиметься незавершеною, якщо не означити ще одну базову сутність сфери комп'ютерингу, якою є інформаційна система. Не претендуючи на абсолютну точність пропонованого твердження, розглядатимемо інформаційну систему як множину координат у чотиривимірному просторі інженерій сфери комп'ютерингу. Тобто інформаційну систему (ІС) подаємо як певний набір інформаційних технологій, що в комплексі зорієнтовані на досягнення певної системної мети, виконуючи задані функції та пропонуючи при цьому споживачам якісні інформаційні продукти та сервіси.

У свою чергу, для всіх штучних інформаційних систем притаманними є чотири життєві фази їхнього формування та функціонування. Йдеться про фази системного аналізу, системного проектування, системної інтеграції та системного адміністрування, які генерують відповідні вимоги до професійної підготовки та практичної орієнтації фахівців у царині інформаційних систем. Ринок потребує системних аналітиків, системних проектувальників, системних інтеграторів та системних адміністраторів.

Комплексний виклад структурованого подання галузі «КОМП'ЮТИНГУ» дозволяє, загалом, чіткіше уявити проблематику та тематику підручників та навчальних посібників, котрі будуть виходити в світ у однойменній освітньо-науковій серії в 50-ти книгах. Для кращого розуміння в майбутньому ще раз

наведемо означення сфери «КОМП'ЮТИНГУ» як галузі знань (науки, виробництва, бізнесу та надання послуг), предметом якої є комплексні дослідження, розроблення, впровадження та використання інформаційних систем, складовими елементами яких є інформаційні технології, що реалізовані на основі сучасних інженерних досягнень комп'ютерної інженерії, інженерії програмного забезпечення, інженерії даних та знань, системної інженерії, котрі базуються на фундаментальних законах та закономірностях інформатики.

Автори підручників і навчальних посібників серії «КОМП'ЮТИНГ» пропонують значний перелік навчальних дисциплін, котрі, з одного боку, включаються до сфери комп'ютингу за означенням, а, з іншого боку, їх предмет ще не знайшов якісного висвітлення у вітчизняній навчальній літературі для вищої школи. Перший крок ми робимо у 2008–2009 рр., виданням принаймні десяти книг серії з подальшим її п'ятикратним розширенням до 2011 р. Структурно серія подається узагальненими профілями як то:

- *фундаментальні проблеми комп'ютингу;*
- *комп'ютерні науки;*
- *комп'ютерна інженерія;*
- *програмна інженерія;*
- *інженерія даних та знань;*
- *системна інженерія;*
- *інформаційні технології та системи.*

При цьому зауважу, що наведені укрупнені профілі серії підручників і навчальних посібників загалом співпадають з профілями бакалавратів, зафіксованих у підсумковому звіті «Computing CURRICULA» редакції 2006 року. Ми розуміємо, що чітка завершена будівля комп'ютингу з'явиться лише в перспективі, а наша праця буде подаватись як активний труд будівничих з якнайшвидшого втілення в життя проекту цієї, без перебільшення, грандіозної будівлі сучасного інформаційного суспільства. Я запрошую потенційних авторів долучитись до цього освітньо-наукового проекту, а шановних читачів виступити в ролі творчих критиків та опонентів. Буду вдячний за Ваші побажання, зауваження та пропозиції.

*З глибокою повагою – науковий редактор серії підручників і навчальних посібників «КОМП'ЮТИНГ», д.т.н., професор Володимир ПАСІЧНИК*

# Вступ

Дисципліна «Алгоритмізація та програмування» вивчається на першому курсі, – з цієї дисципліни розпочинається цикл предметів, що стосуються програмування та розробки програмного забезпечення.

У цьому посібнику для студентів, що навчаються за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти спеціальностей F4 «Системний аналіз та наука про дані» та F6 «Інформаційні системи і технології», містяться теоретичні відомості, приклади, методичні вказівки з їх розв’язування, питання і завдання з контролю знань з розділів (нумерація розділів продовжує нумерацію з Части 1 – 3):

11. Динамічні та рекурсивні структури даних
12. Програми та модулі

Для кожного розділу наведено теоретичні відомості та питання і завдання для контролю знань.

Розділ «Динамічні та рекурсивні структури даних» продовжує розгляд питань, що стосуються роботи з динамічною пам’яттю, розпочатий при вивченні розділу «Одновимірні масиви» в параграфах «Вказівники та динамічні змінні» та «Внутрішнє представлення та реалізація масивів». Цей розділ охоплює такі теми:

В параграфі «Загальні поняття» коротко повторюються поняття доступу до змінної за іменем та за вказівником на неї (пряме та опосередковане звертання), нульового вказівника; вводиться поняття динамічних та рекурсивних структур даних; наводиться класифікація зазначених структур та розглядається приклад визначення, опису, побудови та знищення динамічної мережної структури даних.

В параграфі «Списки» спочатку розглядаються часткові випадки лінійних однонаправлених списків: стек і черга; потім – описуються технології опрацювання лінійних однонаправлених, лінійних двонаправлених та кільцевих однонаправлених списків. Для кожного із вказаних видів списків розглядаються задачі визначення структури списку; опису елемента списку; опису та ініціалізації списку; додавання елементів (формування списку); вилучення елементів (знищення списку); сканування списку (на прикладі

обчислення кількості елементів) – ітераційним та рекурсивним способами; вилучення заданого елемента (вилучення першого елемента, вилучення елемента із середини списку, вилучення останнього елемента списку, принципи організації сканування при вилученні елементів із списку); вставка нового елемента як після, так і перед заданим елементом (знову – всі випадки: по відношенню до першого елемента, до елемента із середини списку, до останнього елемента списку, та принципи організації сканування при вставці нового елемента списку).

В параграфі «Дерева» спочатку розглядаються загальні технології опрацювання бінарних дерев: визначення структури; опис елемента; опис та ініціалізація бінарного дерева; додавання елемента (формування бінарного дерева); вивід бінарного дерева на екран; обхід бінарного дерева (в префіксному, інфіксному та постфіксному порядку); обчислення кількості елементів бінарного дерева; а також запис бінарного дерева у файл і зчитування з файлу. Потім розглядаються бінарні дерева пошуку: спільні риси та відмінності порівняно із «загальними» бінарними деревами; пошук та додавання елемента (формування бінарного дерева пошуку): рекурсивний та ітераційний способи, формування бінарного дерева з лічильником повторень; пошук елементів: пошук заданого елемента, пошук максимального / мінімального елемента, пошук батьківського елемента, пошук наступного / попереднього елемента; поворот бінарного дерева пошуку; балансування бінарного дерева пошуку: на основі кількості елементів в під-деревах та на основі висоти під-дерев; вилучення елементів та під-дерев бінарного дерева пошуку. На завершення параграфу наводяться основні поняття про бінарні піраміди (бінарні купи).

Параграф «Вказівники на функції та функціональні типи даних» не відноситься безпосередньо до тем, які описують принципи побудови динамічних та рекурсивних структур даних, проте в цьому параграфі завершується огляд питань, що стосуються вказівників – а саме, вказівників на функції, тобто, – на код, а не на дані. Спочатку розглядаються вказівники на функції та їх використання; потім – правила тлумачення складних оголошень.

В розділі «Програми та модулі» розглядається технологія створення багатомодульних проектів: поняття та необхідність модулів, відокремлення

інтерфейсу та реалізації модуля, необхідні для цього директиви препроцесора та робота із просторами імен.

Навчальне видання

**Григорович Віктор Геннадійович**

Навчальний посібник

## **Алгоритмізація та програмування**

### **Частина 4**

Динамічні та рекурсивні структури даних

Програми та модулі

Формат 70×100 1/16 . Папір офсетний. Друк  
цифровий. Умовн. друк. арк. 24,21.  
Гарнітура Таймс Нью-Роман.

ПП “Магнолія 2006”  
м. Львів-53, 79053, Україна, тел.+380503701957  
e-mail: [magnol06@ukr.net](mailto:magnol06@ukr.net)

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:  
серія ДК № 2534 від 21.06.2006 року, видане Державним комітетом інформаційної політики,  
телебачення та радіомовлення України

Надруковано у друкарні видавця ФОП Марченко Т. В.