

*Я. С. Пушак, Б. Л. Лозовий*

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ  
І ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ  
СТАТИСТИКИ**

**Навчальний посібник**

*Видання третє, стереотипне*

Видавництво “Магнолія-2006”

Львів

УДК 519.2(075.8)

П 91

*Гриф надано Міністерством освіти та науки України*

**Рецензенти:**

*Каленюк П. І. – доктор фізико-математичних наук, професор Національного університету “Львівська політехніка”;*

*Єлейко Я. І. – доктор фізико-математичних наук, професор Національного університету ім. Івана Франка.*

**Пушак Я. С., Лозовий Б. Л.**

**П 91** Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики: Навч. посібник. 3-тє видан., стер. – Львів: “Магнолія 2006”- 276 с.

ISBN 966-2025-27-8

“Магнолія-2006”

Навчальний посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики відповідає програмам з курсу теорії ймовірностей і математичної статистики для економічних спеціальностей, а також програми з вищої математики інженерно-технічних спеціальностей. Його мета – забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичних положень та практичних навиків, допомогти в самостійному вивченні названої дисципліни.

Посібник складається з двох частин – теорії ймовірностей та елементів математичної статистики і розділений на 14 розділів. У кожному розділі викладено основи теоретичних положень і розв’язані задачі, які ілюструють теоретичний матеріал, а також наведені задачі, які пов’язані з відповідними інженерно-економічними спеціальностями студентів.

У третьому виданні перероблені окремі розділи (зокрема, “Елементи математичної статистики”), впорядкована нумерація формул, а також додано список основних формул теорії ймовірностей та інші довідкові матеріали.

Посібник рекомендовано студентам, аспірантам та викладачам.

**УДК 519.2(075.8)**

ISBN 966-2025-27-8

© Пушак Я. С., Лозовий Б. Л.  
“Магнолія-2006”

# ЗМІСТ

<b>Передмова</b> .....	<b>10</b>
<b>Вступ</b> .....	<b>11</b>
<i>Предмет теорії ймовірностей</i> .....	11
<i>Короткі історичні відомості</i> .....	11
<b>РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ</b> .....	<b>14</b>
1.1. Випадкові події. Класифікація подій .....	14
1.2. Класичне означення ймовірності .....	15
1.3. Відносна частота. Стійкість відносної частоти .....	17
1.4. Статистичне означення ймовірності .....	19
1.5. Геометричне означення ймовірності .....	19
<b>РОЗДІЛ 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ</b> .....	<b>22</b>
2.1. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій ...	22
2.2. Протилежні події. Ймовірність протилежної події ...	23
2.3. Умовна ймовірність. Залежні і незалежні події .....	24
2.4. Теорема множення залежних і незалежних подій ....	25
2.5. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій ....	27
2.6. Ймовірність появи хоча б однієї події .....	29
2.7. Формула повної ймовірності .....	30
2.8. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса .....	32
<i>Вправи</i> .....	33
<i>Запитання для самоперевірки</i> .....	44
<b>РОЗДІЛ 3. СХЕМА ПОВТОРНИХ НЕЗАЛЕЖНИХ     ВИПРОБУВАНЬ</b> .....	<b>46</b>
3.1. Повторні випробування. Біноміальний закон розподілу. Формула Бернуллі .....	46
3.2. Найімовірніше число настання події при повторних випробуваннях .....	49

3.3. Многокутник розподілу ймовірностей .....	52
3.4. Локальна (асимптотична) теорема Муавра-Лапласа .....	53
3.5. Інтегральна теорема Лапласа .....	54
3.6. Ймовірність відхилення відносної частоти від сталой ймовірності в незалежних випробуваннях. Закон великих чисел у формі Бернуллі .....	57
3.7. Теорема Пуассона. Простий потік подій .....	59
<i>Вправи</i> .....	62
<i>Запитання для самоперевірки</i> .....	70

## **РОЗДІЛ 4. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

### **ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ... 71**

4.1. Закон розподілу дискретних випадкових величин ...	71
4.2. Математичне сподівання дискретних випадкових величин та його основні властивості .....	73
4.3. Ймовірнісний зміст математичного сподівання .....	74
4.4. Основні властивості математичного сподівання .....	75
4.5. Математичне сподівання числа появи події в незалежних випробуваннях .....	78
4.6. Дисперсія (розсіювання) дискретної випадкової величини та її основні властивості .....	79
4.7. Середнє квадратичне відхилення .....	85
4.8. Однаково розподілені взаємно незалежні випадкові величини та їх числові характеристики ...	85

## **РОЗДІЛ 5. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ..... 88**

5.1. Нерівність Чебишева. Закон великих чисел в формі Чебишева .....	88
5.2. Теореми Бернуллі і Пуассона .....	91

## **РОЗДІЛ 6. ЗАКОН РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН..... 93**

6.1. Інтегральна функція розподілу та її основні властивості .....	93
---	----

6.2. Диференціальна функція розподілу та її основні властивості .....	96
6.3. Знаходження інтегральної функції розподілу за відомою диференціальною функцією .....	97
6.4. Властивості диференціальної функції розподілу .....	98
6.5. Ймовірнісний зміст диференціальної функції розподілу .....	99

**РОЗДІЛ 7. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ..... 101**

7.1. Математичне сподівання неперервної випадкової величини .....	101
7.2. Нормальний закон розподілу .....	106
7.3. Графік диференціальної функції нормального розподілу .....	108
7.4. Вплив параметрів $a$ і $b$ на форму графіка нормальної кривої .....	109
7.5. Ймовірність попадання в заданий інтервал $(\alpha, \beta)$ випадкової величини, розподіленої за нормальним законом .....	110
7.6. Ймовірність відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом від свого математичного сподівання $a$ .....	112
7.7. Правило трьох сигм .....	112

**РОЗДІЛ 8. ПОКАЗНИКОВИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ..... 114**

8.1. Показниковий (експоненціальний) закон розподілу неперервної випадкової величини .....	114
8.2. Ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал .....	115
8.3. Числові характеристики показникового закону розподілу .....	116
8.4. Функція надійності .....	117

8.5. Показниковий закон надійності .....	118
8.6. Характеристичні властивості показникового закону надійності .....	119

**РОЗДІЛ 9. ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ..... 120**

9.1. Функція одного випадкового аргументу та її розподіл .....	120
9.2. Функція двох випадкових аргументів. Розподіл суми двох незалежних доданків. Стійкість нормального закону розподілу .....	123
<i>Вправи</i> .....	126
<i>Запитання для самоперевірки</i> .....	143

**РОЗДІЛ 10. СИСТЕМА ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН ..... 146**

10.1. Закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини .....	147
10.2. Інтегральна функція розподілу двовимірної випадкової величини .....	149
10.3. Основні властивості інтегральної функції розподілу двовимірної випадкової величини .....	150
10.4. Ймовірність попадання двовимірної випадкової величини в півсмугу .....	151
10.5. Ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник .....	152
10.6. Диференціальна функція двовимірної неперервної випадкової величини (двовимірна густина ймовірності) .....	153
10.7. Знаходження двовимірної інтегральної функції розподілу за відомою двовимірною диференціальною функцією .....	154
10.8. Ймовірнісний зміст диференціальної функції розподілу двовимірної випадкової величини .....	155

10.9. Ймовірність попадання випадкової точки в довільну область .....	156
10.10. Властивості диференціальної функції розподілу ....	158
10.11. Знаходження диференціальних функцій складових двовимірної випадкової величини .....	158
10.12. Умовні закони розподілу складових систем двох дискретних випадкових величин .....	159
10.13. Умовний закон розподілу складових системи двох неперервних випадкових величин .....	161
10.14. Умовне математичне сподівання .....	163
10.15. Залежні і незалежні випадкові величини .....	165
10.16. Числові характеристики системи двох випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції .....	167
10.17. Кореляційність і залежність випадкових величин ...	168
10.18. Нормальний закон розподілу двох випадкових величин .....	170

## **РОЗДІЛ 11. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ**

### **СТАТИСТИКИ .....**

<b>11.1. Завдання математичної статистики .....</b>	<b>171</b>
11.2. Статистичний розподіл .....	172
11.3. Графічне зображення статистичних розподілів ....	175
11.4. Генеральна і вибіркова сукупності. Об'єм генеральної і вибіркової сукупності .....	177
11.5. Способи задання вибірки. Повторна і безповторна вибірки. Репрезентативність вибірки .....	177
11.6. Статистичний розподіл вибірки .....	179
11.7. Емпірична функція розподілу .....	179

## **РОЗДІЛ 12. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ**

### **СТАТИСТИЧНОГО РОЗПОДІЛУ .....**

12.1. Вибіркова середня .....	182
-------------------------------	-----

- 12.2. Вибіркова дисперсія. Формула для обчислення дисперсії..... 183
- 12.3. Надійні інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому середньому квадратичному відхиленні  $\sigma$  ..... 185

## **РОЗДІЛ 13. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ЗБІРНИХ**

### **ХАРАКТЕРИСТИК ВИБІРКИ ..... 188**

- 13.1. Умовні варіанти ..... 188
- 13.2. Звичайний, початковий і центральний емпіричні моменти ..... 189
- 13.3. Умовні емпіричні моменти. Знаходження середньої вибірки і дисперсії ..... 190
- 13.4. Метод добутку обчислення вибіркової середньої і дисперсії..... 191
- 13.5. Зведення початкових варіантів до рівновіддалених ..... 194
- 13.6. Емпіричні і вирівнюючі (теоретичні) частоти ..... 196
- 13.7. Побудова нормальної кривої за дослідними і теоретичними частотами ..... 198
- 13.8. Критерій згідності  $\chi^2$  (критерії Пірсона) ..... 201
- Вправи* ..... 204
- Запитання для самоперевірки* ..... 218

## **РОЗДІЛ 14. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОРЕЛЯЦІЇ ..... 220**

- 14.1. Функціональна, статистична та кореляційна залежності. Умовна середня ..... 220
- 14.2. Дві основні задачі кореляції ..... 221
- 14.3. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за незгрупованими даними ... 221
- 14.4. Кореляційна таблиця ..... 224
- 14.5. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за груповими даними. Вибірковий коефіцієнт кореляції ..... 225

<i>Вправи</i> .....	230
<i>Запитання для самоперевірки</i> .....	240
<b>РОЗДІЛ 15. ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ...</b>	<b>242</b>
<b>Додатки</b> .....	<b>254</b>
<i>Додаток 1. Відомості з комбінаторики</i> .....	254
<i>Додаток 2. Основні формули теорії ймовірностей</i> .....	259
<i>Додаток 3. Таблиця значень <math>\varphi(x)</math></i> .....	267
<i>Додаток 4. Таблиця значень <math>\Phi(x)</math></i> .....	268
<i>Додаток 5. Таблиця <math>\chi^2</math></i> .....	270
<i>Додаток 6. Критичні точки розподілу Стьюдента</i> .....	271
<i>Додаток 7. Рівномірно розподілені випадкові числа</i> ....	272
<b>Використана та рекомендована література</b> .....	<b>274</b>

## ПЕРЕДМОВА

*“Теорія ймовірностей є, по суті, нічим іншим, як здоровим глуздом, вираженим у числах, ... немає науки, яка була б більш гідною наших міркувань і введення якої у систему громадського викладання принесло б більше користі, ніж наука про обчислення ймовірностей.”*

**П. Лаплас**

Цей навчальний посібник є результатом багаторічного викладання авторами курсу теорії ймовірностей і елементів математичної статистики в колишньому Українському поліграфічному інституті – нині Українська академія друкарства – на інженерно-економічному факультеті та на деяких спеціальностях інших факультетів академії.

Підручники з теорії ймовірностей і математичної статистики, рекомендовані навчальними програмами, видані, в основному, російською мовою, є великими за обсягом та у багатьох випадках матеріал у них подано дещо ускладнено, тому важко сприймається пересічним студентом.

## ВСТУП

### ***Предмет теорії ймовірностей***

У практичній діяльності часто доводиться зустрічатись з подіями чи явищами, які можуть відбутися або не відбутися, з причин, яких не можна безпосередньо врахувати із заданих умов.

Вивчення імовірнісних закономірностей однорідних випадкових подій, що відбуваються в масовому масштабі, і складає предмет теорії ймовірностей.

Теорія ймовірностей застосовується в різних галузях науки і техніки, її результати широко використовуються в страховій справі, в теорії помилок, спостережень, а також в теорії артилерійської стрільби, в автоматичній телефонії, в загальній теорії зв'язку та ін.

Теорія ймовірностей є теоретичною основою математичної статистики. Питання організації і планування виробництва також пов'язані з необхідністю врахування випадкових подій і, отже, не можуть бути розв'язані без застосування теорії ймовірностей.

### ***Короткі історичні відомості***

Теорія ймовірностей, подібно до інших математичних наук, розвивалась із практики.

На початку XVII ст. знаменитий фізик *Галілей* намагався піддавати науковому дослідженню помилки фізичних вимірів, розглядаючи їх як випадкові, і оцінював їх ймовірність. До того часу відносяться перші спроби створити теорію страхування, засновану на аналізі закономірностей в таких масо-

вих випадкових явищах, як захворювання, смертність, статистика нещасних випадків і т. д.

Проте теорія ймовірностей, як математична наука, сформувалась, в основному, не на матеріалі, вказаних вище задач тому, що ці задачі досить складні. Необхідно було вивчити спочатку закономірності випадкових явищ на більш простому матеріалі. Таким матеріалом історично виявились так звані “азартні ігри”. Включно до наших днів приклади із “азартних ігор” широко використовувалися як спрощені моделі випадкових подій, випадкових явищ, які ілюструють в найбільш простому і наочному вигляді основні закони і правила теорії ймовірностей.

Виникнення теорії ймовірностей в сучасному розумінні з галузі теорії «азартних ігор» відноситься до середини XVII ст. і пов'язане з іменами таких математиків, як *Паскаль* (1623 – 1663), *Ферма* (1601 – 1665) і *Гюйгенс* (1629 – 1695).

Перший етап в розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з роботами *Якоба Бернуллі* (1654 – 1705). Йому належить перше доведення одного із важливих положень теорії ймовірностей – так званого “закону великих чисел”. Наприклад, якщо багато разів кидати монету, то відносна частота появи герба наближається до  $1/2$ . *Я. Бернуллі* вперше дав теоретичне обґрунтування цього емпіричного закону. Теорема *Я. Бернуллі* – найпростіша форма закону великих чисел – встановлює зв'язок між ймовірністю події і частотою її появи при достатньо великій кількості випробувань.

Другий важливий етап в розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з іменем *Муавра* (1607 – 1754). Він вперше ввів так званий “нормальний закон розподілу”, як його тепер називають – “закон Гауса”.

Видатна роль в розвитку теорії ймовірності належить знаменитому математику *Лапласу* (1749 – 1827). Він вперше дав систематичний виклад основ теорії ймовірностей, дав дове-

дення однієї із форм центральної граничної теореми (теорема Муавра-Лапласа) і показав практичне застосування теорії ймовірностей до конкретних практичних задач, зокрема, до аналізу помилок спостережень при вимірюванні.

Подальший розвиток теорії ймовірностей пов'язаний з видатним математиком *Гаусом* (1777 – 1855), який дав ще більш загальне обґрунтування нормального закону і розробив метод обробки експериментальних даних, відомий під назвою “метод найменших квадратів”. Слід також відзначити роботи *Пуассона* (1781 – 1840), який дав більш загальну, ніж *Я. Бернуллі*, форму закону великих чисел, а також вперше застосував теорію ймовірностей до задач стрільби.

З другої половини XIX ст. розвиток теорії ймовірностей пов'язаний з такими іменами, як *П. Л. Чебишев* (1821 – 1894), *А. А. Марков* (1856 – 1922), *О. М. Ляпунов* (1857 – 1818), а також з такими видатними математиками, як *С. Н. Бернштейн*, *А. М. Колмогоров*, *О. Я. Хінчин*, *Б. В. Гнеденко*, *Е. Е. Слуцький*, *В. І. Романовський*, *Н. В. Смірнов*, *Е. С. Венцель*, *В. С. Пугачов*, *В. Е. Гмурман*, *Н. Вінер*, *В. Феллер*, *Д. Дуб* та ін.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Пушак Ярослав Сильвестрович  
Лозовий Богдан Леонтійович

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ  
І ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ  
СТАТИСТИКИ**

**Навчальний посібник**

Видання третє, стереотипне

Формат 60 × 84/16. Умовн. друк. арк. 16,04.

Гарнітура Таймс Нью Роман

ПП “Магнолія – 2006”

м. Львів-53, 79053, Україна,

Тел.+380503701957; E-mail:magno06@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного реєстру  
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:  
серія ДК № 2534 від 21.06.2006 року, видане Державним комітетом телебачення  
та радіомовлення України

Надруковано в поліграфічному центрі ПП “Магнолія-2006”