

—*рест* 

ВИЩА МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

для студентів закладів вищої освіти

Видавництво “Магнолія 2006”

Львів 2025

УДК 51(075.8)
К 62

Відтворення цієї книжки або будь-якої її частини заборонено без письмової згоди видавництва. Будь-які спроби порушення авторських прав будуть переслідуватися у судовому порядку

Рецензенти:

М. О. Кузін, доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет «Львівська політехніка»);

А. М. Коструба, доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С. З. Гжицького);

В. М. Прокіп, кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник (Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України)

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою
Національного університету «Львівська політехніка»
протокол № 86 від 20 березня 2025 р.

К 62 Коляда Р. В., Мельник І.О., Мельник О. М.
Вища математика: навч. посіб. — Львів: Магнолія 2006,
2025.— 342 с.

ISBN 978-617-574-308-9

Висвітлено основні поняття та методи лінійної алгебри та аналітичної геометрії, математичного аналізу, зокрема диференціального та інтегрального числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайних диференціальних рівнянь, числових і функціональних рядів. Після кожної теми подано завдання для повторення та вправи для самостійного розв'язування, тести для самоконтролю та завдання для індивідуальної роботи.

Для здобувачів вищої освіти технічних та технологічних спеціальностей, зокрема G11Машинобудування (за спеціалізаціями), G20 Видавництво та поліграфія.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-617-574-308-9

© Коляда Р. В., Мельник І.О.,
Мельник О.М., 2025
© ПП “Магнолія 2006”, 2025

ВСТУП

Посібник написаний відповідно до навчальної програми з вищої математики підготовки фахівців інженерно-технічних, технологічних та економічних спеціальностей.

Підготовка фахівців цих спеціальностей вимагає ґрунтовного вивчення курсу вищої математики, який є основою для інших дисциплін, зокрема дисциплін спеціалізації.

Навчальний посібник складається з наступних розділів: елементи лінійної і векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функцій однієї змінної, інтегральне числення, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, теорія рядів, кратні та криволінійні інтеграли.

Виклад навчального матеріалу побудовано за схемою: наводиться необхідний теоретичний матеріал, подаються приклади розв'язування типових задач, запропоновані задачі і вправи для розв'язування їх на практичних заняттях, організації самостійної роботи студентів, сформульовані теоретичні запитання для самоперевірки, а також виділені практичні завдання для контрольної роботи студентів. В посібнику подані тести для перевірки знань з вищої математики.

Посібник рекомендований для вивчення курсу вищої математики студентами денної та заочної форм навчання.

ЗМІСТ

Вступ	3
Навчальна програма	7
РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	11
1.1. Основні відомості з теорії.....	11
1.2. Розв'язування типових задач.....	13
<i>Запитання для самоперевірки</i>	<i>19</i>
<i>Завдання для практичних занять</i>	<i>20</i>
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	24
1.1. Основні відомості з теорії.....	24
1.2. Розв'язування типових задач.....	27
<i>Запитання для самоперевірки</i>	<i>30</i>
<i>Завдання для практичних занять</i>	<i>31</i>
РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ	34
3.1. Пряма на площині.....	34
3.1.1. Основні відомості з теорії.....	34
3.1.2. Кут між двома прямими.....	35
3.1.3. Умова перпендикулярності двох прямих.....	36
3.1.4. Умова паралельності двох прямих.....	36
3.2. Розв'язування типових задач.....	36
3.3. Криві другого порядку.....	40
3.3.1. Основні відомості з теорії.....	40
3.4. Розв'язування типових задач.....	41
<i>Запитання для самоперевірки</i>	<i>43</i>
<i>Завдання для практичних занять</i>	<i>44</i>
РОЗДІЛ 4. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ	47
4.1. Площина.....	47
4.2. Пряма і площина.....	48
4.3. Поверхні другого порядку.....	49
4.4. Розв'язування типових задач.....	50
<i>Запитання для самоперевірки</i>	<i>54</i>
<i>Завдання для практичних занять</i>	<i>55</i>
РОЗДІЛ 5. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ	57
5.1. Основні відомості з теорії.....	57
5.2. Розв'язування типових задач.....	58

<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>63</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>63</i>
РОЗДІЛ 6. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ.....	66
6.1. Основні відомості з теорії.....	66
6.2. Розв'язування типових задач.....	68
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>70</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>71</i>
РОЗДІЛ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ.....	74
7.1. Основні відомості з теорії.....	74
7.2. Розв'язування типових задач.....	75
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>80</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>80</i>
РОЗДІЛ 8. ДИФЕРЕНЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	84
8.1. Основні відомості з теорії.....	84
8.2. Розв'язування типових задач.....	87
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>90</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>90</i>
РОЗДІЛ 9. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	93
9.1. Основні відомості з теорії.....	93
9.2. Розв'язування типових задач.....	96
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>99</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>100</i>
РОЗДІЛ 10. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	102
10.1. Основні відомості з теорії.....	102
10.2. Застосування визначеного інтеграла.....	103
10.3. Розв'язування типових задач.....	105
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>114</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>115</i>
РОЗДІЛ 11. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	118
11.1. Основні відомості з теорії.....	118
11.1.1. Диференціальні рівняння першого порядку.....	118

11.1.2. Диференціальні рівняння вищих порядків.....	120
11.2. Розв'язування типових задач.....	123
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>130</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>131</i>
РОЗДІЛ 12. РЯДИ.....	134
12.1. Основні відомості з теорії.....	134
12.1.1. Числові ряди.....	134
12.1.2. Функціональні ряди. Степеневі ряди.....	136
12.2. Розв'язування типових задач.....	137
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>141</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>142</i>
РОЗДІЛ 13. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ.....	145
13.1. Подвійний інтеграл, його обчислення та застосування.....	145
13.2. Розв'язування типових задач.....	146
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>150</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>150</i>
РОЗДІЛ 14. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	153
14.1. Основні відомості з теорії.....	153
14.2. Розв'язування типових задач.....	155
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>158</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>158</i>
РОЗДІЛ 15. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ.....	161
15.1. Криволінійні інтеграли першого роду.....	161
15.2. Криволінійні інтеграли другого роду.....	163
15.3. Розв'язування типових задач.....	166
РОЗДІЛ 16. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ.....	171
16.1. Поверхневі інтеграли першого роду.....	171
16.2. Поверхневі інтеграли другого роду.....	172
16.3. Розв'язування типових задач.....	175
<i>Запитання для самоперевірки.....</i>	<i>176</i>
<i>Завдання для практичних занять.....</i>	<i>176</i>
<i>Задачі для контрольних робіт.....</i>	<i>181</i>
<i>Тестові завдання.....</i>	<i>231</i>
<i>Література.....</i>	<i>241</i>

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА

I. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Визначники другого і третього порядків, методи їх обчислення. Поняття про визначники вищих порядків. Властивості визначників.
2. Матриці. Основні означення. Дії над матрицями.
3. Обернена матриця. Ранг матриці.
4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Критерій Кронекера-Капеллі сумісності системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язування систем методами Гаусса (Жордана-Гаусса), за формулами Крамера, матричним методом.

II. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1. Системи координат на прямій, площині і в просторі. Перетворення координат.
2. Скалярні і векторні величини. Вектори. Лінійні операції над векторами, їх властивості. Проекція вектора на вісь. Напрямні косинуси вектора.
3. Вектори в координатній формі. Векторний лінійний простір. База. Розклад вектора за даною базою.
4. Власні числа та власні вектори матриці.
5. Скалярний добуток двох векторів, його властивості. Проекція вектора на вектор. Кут між векторами. Умови паралельності і перпендикулярності векторів.
6. Векторний добуток двох векторів, його властивості, обчислення, застосування.
7. Мішаний (векторно-скалярний) добуток векторів, його властивості, обчислення, застосування. Геометричний зміст визначника третього порядку.

III. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.

1. Лінія на площині, її рівняння. Пряма на площині, рівняння прямої. Кут між прямими, умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої.
2. Лінії другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола; їх канонічні рівняння і властивості.
3. Пряма і площина в просторі. Кут між двома площинами, прямими,

прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності площин, прямих, прямої і площини. Поверхні другого порядку.

IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1. Множини. Числові множини. Числові проміжки. Модуль дійсного числа. Функція. Способи задання та класифікація функцій.
2. Числова послідовність. Границя числової послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Основні властивості нескінченно малих. Основні теореми про границі.
3. Границя функції в точці, на нескінченності. Обчислення границь функцій, Перша та друга важливі границі. Число “ e ”. Натуральні логарифми. Порівняння нескінченно малих функцій.
4. Неперервність функції в точці. Точки розриву. Дії над неперервними функціями. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

V. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Задачі, що приводять до поняття похідної функції. Похідна функції, її геометричний, механічний та економічний зміст. Правила диференціювання суми, добутку і частки функцій.
2. Похідна складної функції. Похідна оберненої функції. Похідні основних елементарних функцій. Похідна функції, що задана параметрично. Диференціювання неявно заданих функцій. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневі функції.
3. Диференціал функції. Геометричний та механічний зміст диференціала, його властивості. Застосування диференціала до наближених обчислень.
4. Похідні та диференціали вищих порядків.
5. Основні теореми диференціального числення: теореми Ферма, Ролля, Коші, Лагранжа. Правило Лопітала.
6. Формули Тейлора і Маклорена, їх застосування до наближених обчислень.

VI. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

1. Монотонність функції. Екстремум функції. Необхідні і достатні

-
- умови екстремуму функції. Найбільше і найменше значення функції на відрізку.
 - Опуклість та вгнутість кривих. Точки перегину. Асимптоти кривої.
 - Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

VII. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

- Функції багатьох змінних. Границя та неперервність функції багатьох змінних.
- Частинні похідні та частинні диференціали функцій. Повний диференціал та його застосування до наближених обчислень.
- Диференціали вищих порядків. Похідна складної функції.
- Диференціали неявної функції. Дотична площина і нормаль до поверхні. Геометричний зміст диференціала функції двох змінних.
- Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт функції
- Екстремуми функції двох змінних. Необхідні і достатні умови екстремуму. Умовний екстремум. Найбільше і найменше значення функції.

VIII. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

- Невизначений інтеграл. Первісна. Невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів основних елементарних функцій.
- Основні методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, заміна змінної інтегрування (підстановки), інтегрування частинами.
- Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен, дробово-раціональних функцій. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції та деякі ірраціональні вирази.
- Визначений інтеграл. Задачі, що приводять до визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла.
- Формула Ньютона–Лейбніца. Методи інтегрування визначеного інтеграла. Наближене обчислення визначених інтегралів.
- Застосування визначеного інтеграла.
- Невластиві інтеграли першого (з нескінченними межами) та другого (від нескінченних функцій) родів.

ІХ. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші.
Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння.
2. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.
Метод Лагранжа варіації довільної постійної.
3. Однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку.
Метод Лагранжа варіації довільних постійних.
4. Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами.
Системи диференціальних рівнянь.

Х. РЯДИ

1. Числові ряди. Сума ряду. Необхідна умова збіжності числового ряду. Властивості числових рядів.
2. Знакододатні числові ряди. Достатні умови збіжності знакододатних рядів.
3. Ряди, в яких знаки членів строго чергуються. Ознака Лейбніца.
Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжності.
4. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Область збіжності степеневих рядів.
5. Ряди Тейлора і Маклорена. Використання рядів для наближених обчислень.

ХІ. КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

1. Подвійний інтеграл: задачі, що приводять до подвійного інтеграла, умови його існування та властивості.
2. Обчислення подвійного інтеграла. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах.
3. Застосування подвійного інтеграла до задач геометрії, механіки.
4. Потрійний інтеграл: умови його існування, властивості, обчислення.
5. Застосування потрійного інтеграла.
6. Криволінійні інтеграли першого роду: обчислення, застосування.
7. Криволінійні інтеграли другого роду: обчислення, застосування.
8. Зв'язок між криволінійними інтегралами першого і другого роду.
Формула Гріна.
9. Поверхневі інтеграли першого і другого роду.
Формула Остроградського – Гаусса. Формула Стокса.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**Коляда Ростислава Василівна
Мельник Іванна Орестівна
Мельник Орест Михайлович**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Керівник видавничого проекту *В. М. Піча*

Формат 60 × 84/16. Папір офсетний. Гарнітура Таймс Нью Роман.
Умовн. друк. арк. 19,88. Друк цифровий.

ПП “Магнолія 2006”

м. Львів-53, 79053, Україна, тел.+380503701957

e-mail: magnol06@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої
продукції: серія ДК № 2534 від 21.06.2006 року,
видане Державним комітетом інформаційної політики,
телебачення та радіомовлення України