

О. В. Бех, Т. А. Городня, А. Ф. Щербак

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

**Видавництво ІІІ “Магнолія 2006”
Львів 2025**

УДК 519.85(075.8)
Б 5 5

Відтворенн цієї книги або будь-якої її частини заборонено без письмової згоди видавництва. Будь-які спроби порушення авторських прав будуть переслідуватися у судовому порядку.

Гриф надано Міністерством освіти та науки України

Рецензенти:

Нікішов В. І. – член-кор. НАНУ, доктор фіз.-мат. наук, професор, заступник директора Інституту гідромеханіки НАНУ;

Кіфоренко Б. М. – доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри механіки суцільних середовищ Київського національного університету ім Тараса Шевченка;

Харитонов О. М. – кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри механіки суцільних середовищ Київського національного університету ім Тараса Шевченка;

Шевченко К. Л. – кандидат техн. наук, доцент, завідувач кафедри автоматизації та комп'ютерних систем Київського національного університету технологій і дизайну.

ISBN 978-966-2025-05-5

Б 55 Бех О. В., Городня Т. А., Щербак А. Ф.

Математичне програмування: Навч. посіб. – Львів: “Магнолія 2006”, 2025.– 199 с.

Зміст навчального посібника відповідає навчальній програмі дисципліни “Математичне програмування” загального курсу “Економіко-математичне моделювання” для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Крім теоретичного матеріалу, в навчальному посібнику розглядається практична сторона вивчення математичного програмування. У кінці кожного розділу наведено висновки та контрольні запитання.

Усі алгоритми розв'язування задач наведено у вигляді блок-схем і рекомендовано для вивчення методів оптимізації. Така форма наочна, зручна і сприяє широкому використанню цих методів для пошуку оптимальних варіантів.

ББК 22.183.4я73

Б 5 5

ISBN 978-966-2025-05-5

© Бех О. В., Городня Т. А., Щербак А. Ф., 2025
© “Магнолія 2006”, 2025

ЗМІСТ

<i>Передмова</i>	6
<i>Вступ</i>	7
Розділ 1. Загальна задача лінійного програмування	11
1.1. Основні означення	12
1.2. Загальна характеристика задач лінійного програмування	14
1.3. Основні типи прикладних задач лінійного програмування	17
1.3.1. Задача на суміш	17
1.3.2. Транспортна задача	19
1.4. Графічний метод	21
1.5. Симплексний метод	25
1.5.1. Основна ідея методу	25
1.5.2. Умови оптимальності	27
1.5.3. Розширена форма математичної моделі	28
1.5.4. Початковий базисний розв'язок	31
1.5.5. Алгоритм перетворення	33
1.5.6. Альтернативний оптимум	37
1.5.7. Випадок виродження та зациклювання	41
1.6. Рекомендації щодо розв'язування задачі лінійного програмування	42
<i>Висновки</i>	43
<i>Контрольні запитання</i>	44
Розділ 2. Двоїсті задачі лінійного програмування	45
2.1. Взаємно двоїсті задачі	45
2.2. Алгоритм перетворення	46
2.3. Математичні моделі двоїстої пари задач та приклади їх побудови	47
2.4. Економічний зміст двоїстої пари задач	50
2.5. Теореми двоїстості	52
2.6. Розв'язування двоїстої задачі	53
2.7. Двоїстий симплекс-метод	56
2.8. Двоїсті оцінки	60
2.8.1. Міра дефіциту ресурсів	60
2.8.2. Вплив зміни величини початкових ресурсів на цільову функцію	61
2.8.3. Аналіз рентабельності виготовлення продукції	62
2.8.4. Аналіз на взаємозаміну ресурсів	63
2.8.5. Аналіз доцільності розширення асортименту продукції, що випускається	64
<i>Висновки</i>	65
<i>Контрольні запитання</i>	66
Розділ 3. Транспортна задача	67
3.1. Властивості та типи транспортних задач	67
3.2. Умови оптимальності	69
3.3. Випадок виродження	70

3.4. Метод розв'язування транспортної задачі	71
3.4.1. Діагональний спосіб	72
3.4.2. Спосіб мінімального елемента	73
3.4.3. Спосіб подвійних позначок	74
3.4.4. Аналіз плану на оптимальність	74
3.4.5. Побудова циклу перерозподілу ресурсів	75
3.4.6. Знаходження нового плану розподілу ресурсів	77
3.5. Альтернативний оптимум	79
3.6. Рекомендації щодо розв'язування	83
<i>Висновки</i>	84
<i>Контрольні запитання</i>	84
Розділ 4. Параметричне програмування	86
4.1. Економічна інтерпретація задач параметричного програмування	86
4.2. Типи задач параметричного програмування	87
4.3. Геометрична інтерпретація	89
4.4. Розв'язування задач	90
4.5. Інші типи задач	97
<i>Висновки</i>	98
<i>Контрольні запитання</i>	98
Розділ 5. Елементи теорії ігор	99
5.1. Загальна характеристика та класифікація ігрових задач	99
5.2. Матрична гра з нульовою сумою	101
5.3. Мішані стратегії	105
5.4. Розв'язування матричної гри	107
5.4.1. Графічний метод	107
5.4.2. Зведення матричної гри з нульовою сумою до задач лінійного програмування	110
<i>Висновки</i>	115
<i>Контрольні запитання</i>	115
Розділ 6. Елементи динамічного програмування	116
6.1. Основні властивості задач динамічного програмування та недоліки методу	116
6.2. Загальна математична модель	119
6.3. Розв'язування дискретних задач	120
6.3.1. Рекурентне співвідношення	120
6.3.2. Таблиця оптимальних розв'язків	124
6.3.3. Приклад	125
6.4. Випадок двосторонніх обмежень на змінні	130
6.5. Задачі з багатьма видами ресурсів	130
6.6. Неперервні моделі	131
6.7. Задача управління запасами	132
<i>Висновки</i>	133
<i>Контрольні запитання</i>	134

Розділ 7. Дискретне програмування	135
7.1. Класифікація задач дискретного програмування	135
7.2. Лінійні цілочислові задачі	137
7.2.1. Метод відтинання. Додаткове обмеження	137
7.2.2. Перший алгоритм Гоморі	139
7.2.3. Приклад	142
7.3. Задачі з бульовими змінними	144
7.3.1. Задача про призначення	144
7.3.2. Угорський метод	145
7.3.3. Приклад	147
7.3.4. Задача про кільцевий маршрут	149
7.3.5. Метод розгалужень і меж	151
7.3.6. Приклад	154
<i>Висновки</i>	159
<i>Контрольні запитання</i>	160
Розділ 8. Програмування на мережах	161
8.1. Основні поняття теорії графів	161
8.2. Засоби завдання графів. Зважені графи та мережі	163
8.3. Потоки на мережах. Поняття розрізу	164
8.4. Задача про максимальний потік	166
8.4.1. Загальна постановка	166
8.4.2. Алгоритм Форда-Фалкерсона	167
8.4.3. Приклад	169
8.5. Задача про найкоротшу відстань	171
8.5.1. Загальна постановка	171
8.5.2. Алгоритм розв'язування	172
8.5.3. Приклад	174
8.6. Транспортна задача у сітвовій постановці	175
<i>Висновки</i>	178
<i>Контрольні запитання</i>	178
Розділ 9. Нелінійне програмування	179
9.1. Властивості нелінійних задач	179
9.2. Деякі питання та визначення	182
9.3. Задачі опуклого програмування	183
9.4. Аналіз цільової функції на екстремум	184
9.5. Алгоритми розв'язку найпростіших нелінійних задач	186
9.5.1. Метод множників Лагранжа	186
9.5.2. Градієнтні методи	187
<i>Висновки</i>	198
<i>Контрольні запитання</i>	198

Передмова

Навчальний посібник адресований студентам економічних спеціальностей і усім фахівцям, які цікавляться використанням методів оптимізації в економічних процесах.

Автори прагнули до того, щоб матеріал посібника був доступним широкому колу читачів. Тому математична підготовка читачів не потребує спеціальних знань, які виходять за межі середньої школи та елементарного знайомства з елементами лінійної алгебри, диференційного числення та теорії ймовірності. З цих позицій, викладання матеріалу ведеться на достатньо простому рівні і може використовуватися не тільки для первісного знайомства з математичними методами, а й для повторення матеріалу по декотрим забутим питанням побудови та використання математичних моделей в економіці.

Автори висловлюють подяку колективу кафедри вищої математики Криворізького економічного інституту Київського економічного університету за обговорення рукопису посібника та низку цінних порад і зауважень до структури та змісту матеріалу посібника, що сприяє його поліпшенню. Особливу подяку автори висловлюють рецензентам за їх уважне ставлення до рецензування посібника та слушні зауваження, які вказано при зустрічах з авторами.

Щиру подяку автори висловлюють Керді Г. Д., яка виконала коректуру та комп'ютерний набір остаточного варіанту посібника до видання.

Хотілося б вірити, що цей посібник надасть читачу базові знання про математичні методи оптимізації, розширить світогляд і сприятиме широкому використанню цих методів у практиці управління економічними процесами.

Навчальне видання

Бех Олександр Володимирович
Городня Тетяна Анатолівна
Щербак Анатолій Федорович

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Формат 60 × 84/16. Умовн. друк. арк. 11,51.
Гарнітура Таймс Нью Роман

ПП “Магнолія 2006”

м. Львів-53, 79053, Україна.

Тел. +380503701957; E-mail: magnol06@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції:

серія ДК № 2534 від 21.06.2006 року,

видане Державним комітетом телебачення і радіомовлення України

Віддруковано в поліграфічному центрі ПП “Магнолія 2006”