

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»**

**ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ  
КОМП'ЮТЕРНОГО АНАЛІЗУ**

**НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ  
НАПРЯМКУ ПІДГОТОВКИ "ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЇ"**

за загальною редакцією  
кандидата технічних наук, доцента В.В. Турупалова

Видавництво ПП «Магнолія 2006»  
Львів 2024

УДК 004:519.6  
ББК 32.973.202:22.193  
Ч 66

**Відтворення цієї книги або будь-якої її частини заборонено без письмової згоди видавництва. Будь-які спроби порушення авторських прав переслідуватимуться у судовому порядку.**

**Автори:**

**Воропаєва Вікторія Яківна** – доцент кафедри «Автоматика і телекомунікації» Донецького національного технічного університету, кандидат технічних наук, доцент;

**Локтіонов Ігор Костянтинович** – старший викладач кафедри «Вища математика» Донецького національного технічного університету;

**Мироненко Леонід Петрович** – доцент кафедри «Вища математика» Донецького національного технічного університету, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

**Турупалов Віктор Володимирович** – декан факультету комп'ютерних інформаційних наук і автоматики Донецького національного технічного університету, кандидат технічних наук, доцент

**Рецензенти:**

**Г.О. Сукач**, доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет біоресурсів і природокористування України);

**І.І. Мохунь**, доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича);

**Л.Н. Беркман**, доктор технічних наук, професор (Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій).

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів.*

л

**Чисельні методи комп'ютерного аналізу:** навч. посіб. / В.Я. Воропаєва, Ч 66 І.К. Локтіонов, Л.П. Мироненко та ін.; за заг. ред. В.В. Турупалова. – Львів: «Магнолія 2006», 2024. – 224 с.

ISBN 978-966-377-120-5

Викладено основи використання чисельних методів комп'ютерного аналізу в телекомунікаційних системах та мережах, розглянуто основні питання теорії похибок; проаналізовані підходи до вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь; приведені наближені методи вирішення нелінійних алгебраїчних та звичайних диференціальних рівнянь. Особлива увага зосереджена на питаннях інтерполяції та апроксимації складних функцій, зокрема з використанням сучасних програмних засобів.

Навчальний посібник призначений для студентів напрямку підготовки «Телекомунікації» та може бути корисним технічним фахівцям, аспірантам, студентам інших спеціальностей галузі знань «Радіотехніка».

ISBN 978-966-377-120-5

© Воропаєва В.Я., Локтіонов І.К.,  
Мироненко Л.П., Турупалов В.В., 2024  
© «Магнолія 2006», 2024

## **ВСТУП**

Чисельний аналіз являє собою одну з основних дисциплін, що завершують математичну підготовку сучасних інженерів технічних і математичних спеціальностей вузів. Знання основ теорії та способів реалізації чисельних методів на практиці необхідно при проектній розробці та розрахунковому обґрунтуванні елементів конструкцій і вузлів сучасної телекомунікаційної техніки, що передують вибору параметрів конструкцій. Розрахунки здійснюються з використанням чисельних методів і засобів обчислювальної техніки. При проектуванні телекомунікаційних систем виконуються наступні етапи:

- фізична постановка задачі, як правило, цей етап здійснюється спеціалістом у конкретній галузі;
- створення математичної моделі, адекватній фізичній постановці задачі;
- вибір методу рішення;
- побудова алгоритму;
- програмна реалізація;
- рішення задачі;
- аналіз результатів;
- проектування системи.

За результатами аналізу отриманого рішення задачі можна повертатися до будь-якого зазначеного етапу для внесення змін у разі їх необхідності.

Класичним засобом побудови моделей та дослідження на їх основі властивостей реальних об'єктів є аналітичні методи. Ці методи дають найповнішу інформацію щодо розв'язування задачі, оскільки дозволяють отримувати точні розв'язки за математичними формулами в будь-якій точці області визначення функції. На жаль, тільки обмежений клас задач, які вирішуються аналітичними методами. Тому на практиці розв'язок багатьох задач здійснюється чисельними методами. Чисельні методи – це методи наближеного розв'язування задач прикладної

математики, що ґрунтуються на реалізації алгоритмів, відповідних математичним моделям. Наука, що вивчає чисельні методи, називається чисельний аналіз або обчислювальна математика.

На відміну від аналітичних, чисельні методи дають не загальні, а окремі розв'язки, які визначаються не в континуальних, а в дискретних областях незалежних змінних. При цьому виконується достатня кількість елементарних арифметичних операцій над числовими масивами. Наближений обчислювальний процес характеризується певними поняттями, пов'язаними з конкретними задачами і чисельними методами (схемами): стійкістю, що залежить від доброї обумовленості задачі, збіжністю, точністю, економічністю, похибкою методу.

Чисельний метод називається *збіжним*, якщо при прагненні параметрів методу до певних граничних значень (наприклад, кроків сітки до нуля) результати розрахунку прагнуть до точного рішення.

Задача є *добре обумовленою*, якщо при невеликих змінах вхідних даних результати її розв'язування змінюються незначно (безперервна залежність рішення від вихідних даних) і при будь-яких вихідних даних з можливого діапазону їх зміни задача однозначно розв'язувана.

Чисельний метод називається *стійким*, якщо результати розрахунку безперервно залежать від вихідних даних задачі (виконується умова доброї обумовленості задачі) і похибка округлення, пов'язана з реалізацією методу, при заданих межах зміни параметрів чисельного методу залишається обмеженою.

Існують два класи чисельних методів розв'язування рівнянь та систем рівнянь:

- прямі методи, що дозволяють знайти рішення за певне число операцій;
- ітераційні методи, що використовують повторювальні (циклічні) процеси і дозволяють отримати рішення в результаті послідовних наближень. Операції, які входять у процес, що повторюється, складають *ітерацію*.

Ітераційні методи, звані часто методами послідовних наближень, застосовуються, зокрема, для наближеного розв'язування нелінійних алгебраїчних, трансцендентних, диференціальних та інтегральних рівнянь, а також для вирішення систем лінійних та нелінійних рівнянь. Розв'язок є границею послідовності наближень, обчислюваних в процесі ітерацій. Ітерація (від лат. *iteratio* - повторення) - повторне застосування будь-яких математичних операцій.

При розв'язуванні задачі методом ітерацій спочатку задають деякі початкові (нульові) значення шуканих величин. З цих початкових наближень за відомими формулами отримують нові, «покращені» наближені значення, які знову покращують і т.д. до тих пір, поки не буде досягнута задана точність. При виконанні певних умов побудована таким чином послідовність наближень збігається до точного розв'язку, якщо останній існує.

Як було зазначено, рішення, отримані чисельними методами, мають похибки. Отже, важливою складовою чисельного аналізу є кількісна або якісна оцінка похибок, що були допущені. Крім того, основні інженерні задачі в галузі телекомунікацій зводяться до лінійних, нелінійних, диференційних рівнянь та їх систем або вимагають виконання операцій диференціювання та інтегрування. Тому чисельні методи розв'язування цих типів задач і розглядаються у даному навчальному посібнику.

Авторський внесок розподілений наступним чином: доц. Воропаєва В.Я. – гл.4 і 7, ст.викл. Локтіонов І.К. – гл. 2, 3 і 9, доц. Мироненко Л.П. – гл 6, 8 і 10, проф. Турупалов В.В. – гл. 1, 5, 8 і загальна редакція посібника.

Автори висловлюють глибоку вдячність рецензентам: проф. Г.О. Сукачу, проф. І.І. Мохуню та проф. Л.Н. Беркман за висловлені зауваження щодо тексту рукопису. Також автори будуть вдячні читачам за відгуки та зауваження, які можна надсилати на e-mail: voropayeva@donntu.edu.ua

## ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК	6
1.1. Обчислювальна похибка	7
1.2. Правила округлення чисел	10
1.3. Похибки арифметичних дій	11
1.3.1. Похибка суми і різниці	11
1.3.2. Похибка добутку	11
1.3.3. Похибка частки	12
1.3.4. Похибки степеня і кореня	13
1.3.5. Похибка значення функції	13
1.3.6. Правила підрахунку цифр	15
2. ПРИНЦИП СТИСКАЮЧИХ ВІДОБРАЖЕНЬ	16
3. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ	23
3.1. Метод простих ітерацій (метод послідовних наближень)	23
3.2. Застосування принципу стискаючих відображень для дослідження збіжності ітераційних методів розв'язування СЛАР	26
3.3. Достатні умови збіжності ітераційного процесу	30
3.4. Оцінка похибки наближеного процесу методу ітерацій	30
3.5. Метод Зейделя	33
3.6. Оцінка похибки методу Зейделя	34
3.7. Метод Гаусса - метод послідовного виключення невідомих	35
4. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ	41
4.1. Вибір числа коефіцієнтів емпіричної формули	44
4.2. Необхідні умови існування деяких емпіричних залежностей	47
4.3. Метод середніх	52

5.	ІНТЕРПОЛЯЦІЯ	53
5.1.	Постановка задачі інтерполяції	53
5.2.	Оцінка похибки поліноміальної інтерполяції	56
5.3.	Скінченні різниці	57
5.4.	Види таблиць скінченних різниць	61
5.5.	Узагальнені різниці	64
5.6.	Перша інтерполяційна формула Ньютона	66
5.7.	Друга інтерполяційна формула Ньютона	69
5.8.	Інтерполяційна формула Лагранжа	71
5.9.	Інтерполяційний поліном Ньютона для нерівновіддалених вузлів	74
5.10.	Інші інтерполяційні формули	76
6.	ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	82
6.1.	Основні поняття, пов'язані з нелінійними рівняннями	82
6.2.	Умови існування коренів рівняння і їхня ізоляція	85
6.3.	Метод ділення відрізка навпіл	87
6.4.	Метод хорд	89
6.5.	Метод Ньютона	93
6.6.	Метод січних	100
6.7.	Комбінований метод хорд і дотичних	101
6.8.	Метод простих ітерацій	102
6.9.	Короткий огляд деяких чисельних методів розв'язування нелінійних рівнянь	107
7.	МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	110
7.1.	Формула Тейлора для функції двох змінних	112
7.2.	Метод Ньютона	114
7.3.	Метод простих ітерацій	117
7.4.	Приведення СНР до нормальної форми	121
7.5.	Узагальнення методу Ньютона	124
7.6.	Узагальнення методу простих ітерацій	130

---

7.7.	Метод Пікара	133
7.8.	Метод якнайшвидшого спуска	135
8.	<b>ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ</b>	138
8.1.	Метод прямокутників	139
8.2.	Метод трапецій	145
8.3.	Метод парабол (Сімпсона)	147
8.4.	Формула Котеса	153
8.5.	Метод Гаусса	153
8.6.	Оцінка похибок квадратурних формул методом подвійного перерахування	162
8.7.	Інтегрування за допомогою степеневих рядів	163
9.	<b>ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ</b>	165
9.1.	Визначення похідної в чисельних методах	165
9.2.	Застосування полінома Тейлора для обчислення похідних	167
9.3.	Диференціювання інтерполяційних поліномів	168
9.3.1.	Формули Ньютона для рівновіддалених точок.	169
9.3.2.	Формула Стірлінга	171
9.3.3.	Формула Лагранжа	172
10.	<b>НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ</b>	174
10.1.	Постановка задачі й теорема існування і єдиності	174
10.2.	Метод інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів	177
10.3.	Метод послідовних наближень	180
10.4.	Метод невизначених коефіцієнтів	185
10.5.	Метод введення малого параметра	187
10.6.	Чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь	188
10.6.1	Базовий інтеграл і загальна характеристика методів Рунге-Кутта	188



10.6.2	Метод Ейлера	190
.		
10.6.3	Метод Ейлера для системи диференційних рівнянь	193
.		
10.6.4	Метод Ейлера-Коші	193
.		
10.6.5	Модифікований метод Ейлера	197
.		
10.6.6	Модифікований метод Ейлера для системи диференціальних рівнянь	200
.		
10.6.7	Метод Рунге-Кутта четвертого порядку	200
.		
10.7.	Метод Адамса	205
	ЛІТЕРАТУРА	209
	ЗМІСТ	212

Навчальне видання

ВОРОПАЄВА Вікторія Яківна  
ЛОКТІОНОВ Ігор Костянтинівич  
МИРОНЕНКО Леонід Петрович  
ТУРУПАЛОВ Віктор Володимирович

## **ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ КОМП'ЮТЕРНОГО АНАЛІЗУ**

Навчальний посібник

Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman  
Умовн. друк. арк. 14.  
ПП “Магнолія 2006”  
м. Львів-53, 79053, Україна, тел.+380503701957  
e-mail: magnol06@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру видавців, виготівників і  
розповсюджувачів видавничої продукції: серія ДК № 2534 від  
21.06.2006 року, видане Державним комітетом інформаційної  
політики, телебачення та радіомовлення України

Надруковано у друкарні видавництва “Магнолія 2006”