

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

Серія «Комп'ютинг'»

Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

П і д р у ч н и к

За науковою редакцією
доктора технічних наук, професора
В. В. Пасічника

Видання 7-ме, виправлене та доповнене

Магнолія 2006

Львів
2024

ЛНУ ім. Івана Франка

УДК 519.1(075.8)
Н64

Відтворення цієї книги або будь-якої її частини заборонено без письмової згоди видавництва. Будь-які спроби порушення авторських прав будуть переслідуватися у судовому порядку.

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. *Я. М. Николайчук*
(Тернопільський національний економічний університет);

д-р техн. наук, проф. *Б. П. Русин*
(Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України);

д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. Г. Цегелик*
(Львівський національний університет імені Івана Франка)

*Рекомендовано до друку Вченою радою
Львівського національного університету
імені Івана Франка.
Протокол № 46 / 4 від 26 квітня 2023 року.*

Нікольський Ю. В.

Н64 Дискретна математика : підручник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина ; за наук. ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Пасічника. – 7-ме видання, випр. та допов. – Львів : ПП "Магнолія 2006 "; ЛНУ ім. Івана Франка, 2024.– 432 с.

ISBN 978-617-574-266-2

ПП "Магнолія 2006"

ISBN 978-617-10-0782-6

ЛНУ ім. Івана Франка

У підручнику викладено основні поняття та методи дискретної математики. Окрім таких розділів, як математична логіка, теорія множин і відношень, комбінаторний аналіз, теорія графів, основи теорії кодів, теорія булевих функцій, основи теорії формальних мов та алгоритмів, розглянуто також теорію складності обчислень. Виклад матеріалу супроводжується багатьма докладно розібраними прикладами, кожний розділ завершується збірником задач для самостійного розв'язування та списком комп'ютерних проєктів для індивідуальних завдань. За змістом та обсягом підручник відповідає навчальним планам дисципліни «Дискретна математика» для студентів базових напрямів «Комп'ютерні науки», «Програмна інженерія», «Комп'ютерна інженерія», «Інформатика», «Прикладна математика» та «Системний аналіз». Ним можуть скористатись аспіранти та викладачі вищих навчальних закладів.

УДК 519.1(075.8)

ISBN 978-617-574-266-2 ПП "Магнолія 2006"

ISBN 978-617-10-0782-6 ЛНУ ім. Івана Франка

© Нікольський Ю. В., Пасічник В. В.,
Щербина Ю. М., випр. та допов., 2024
© ПП "Магнолія 2006", 2024
© ЛНУ ім. Івана Франка, 2024

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА НАУКОВОГО РЕДАКТОРА СЕРІЇ ПІДРУЧНИКІВ ТА НАВЧАЛЬНИХ ПОСІБНИКІВ «КОМП'ЮТИНГ»	9
---	---

ВСТУПНЕ СЛОВО АВТОРІВ	14
-----------------------------	----

РОЗДІЛ 1.

ОСНОВИ: ЛОГІКА І МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ, МНОЖИНИ, ФУНКЦІЇ	16
--	----

1.1. Логіка висловлювань	17
--------------------------------	----

1.2. Закони логіки висловлювань.....	22
--------------------------------------	----

1.3. Нормальні форми логіки висловлювань	24
--	----

1.4. Логіка першого порядку.....	25
----------------------------------	----

1.5. Закони логіки першого порядку.....	30
---	----

1.6. Випереджена нормальна форма	32
--	----

Алгоритм зведення довільної формули логіки першого порядку до випередженої нормальної форми	32
---	----

1.7. Логічне виведення в логіці висловлювань	33
--	----

1.8. Застосування правил виведення в логіці висловлювань.....	35
---	----

1.9. Метод резолюцій.....	37
---------------------------	----

Алгоритм методу резолюцій.....	38
--------------------------------	----

1.10. Правила виведення у численні предикатів	40
---	----

1.11. Методи доведення теорем	41
-------------------------------------	----

1.11.1. Пряме доведення.....	41
------------------------------	----

1.11.2. Доведення від протилежного	41
--	----

1.11.3. Доведення аналізом випадків	42
---	----

1.11.4. Доведення еквівалентності	42
---	----

1.11.5. Теореми існування	42
---------------------------------	----

1.11.6. Математична індукція	42
------------------------------------	----

1.12. Множина. Кортж. Декартів добуток.....	43
---	----

1.13. Операції над множинами. Доведення рівностей з множинами	45
---	----

1.14. Комп'ютерне подання множин	47
--	----

1.15. Функції.....	48
--------------------	----

1.16. Зростання функцій. Оцінки складності алгоритмів.....	52
--	----

Резюме	55
---------------------	----

Задачі для самостійного розв'язування	57
--	----

Комп'ютерні проекти	67
----------------------------------	----

РОЗДІЛ 2.

КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ	68
-----------------------------------	----

2.1. Основні правила комбінаторного аналізу. Розміщення та сполучення	68
---	----

2.2. Обчислення кількості розміщень і сполучень	70
---	----

2.3. Перестановки	71
-------------------------	----

2.4. Біном Ньютона	72
--------------------------	----

2.5. Поліноміальна теорема	74
2.6. Задача про цілочислові розв'язки.....	75
2.7. Числа Стірлінга другого роду та числа Белла	76
2.8. Генерування перестановок.....	77
Алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки за	
перестановкою $a_1 a_2 \dots a_n$	78
Обґрунтування алгоритму	78
2.9. Генерування сполучень	78
Алгоритм побудови лексикографічно наступного сполучення	79
Обґрунтування алгоритму.....	79
2.10. Генерування розбиттів множини	80
2.11. Рекурентні рівняння	81
2.12. Розв'язування рекурентних рівнянь.....	82
2.13. Принцип коробок Діріхле.....	86
2.14. Принцип включення – виключення.....	87
2.15. Принцип включення – виключення в альтернативній формі	88
2.16. Продуктивні функції	89
2.16.1. Степеневі ряди та їхні властивості	89
2.16.2. Поняття продуктивної функції	91
2.16.3. Продуктивні функції для сполучень	91
2.16.4. Продуктивні функції для розміщень	95
2.16.5. Застосування продуктивних функцій до розв'язування рекурентних рівнянь.....	97
Резюме.....	99
Задачі для самостійного розв'язування.....	101
Комп'ютерні проекти.....	106
РОЗДІЛ 3.	
ТЕОРІЯ ГРАФІВ.....	107
3.1. Основні означення та властивості.....	107
3.2. Деякі спеціальні класи простих графів.....	112
3.3. Способи подання графів	114
3.3.1. Матриця інцидентності.....	114
3.3.2. Матриця суміжності.	115
3.3.3. Подання графа списком пар (списком ребер).....	116
3.3.4. Подання графа списками суміжності.....	117
3.4. Шляхи та цикли. Зв'язність	118
3.4.1. Головні означення та результати. Термінологія.....	118
3.4.2. Характеристики зв'язності простого графа.....	121
3.4.3. Критерій двочастковості графа.....	123
3.5. Ізоморфізм графів.....	124
3.6. Ейлерів цикл у графі.....	127
Алгоритм Флері побудови ейлерового циклу.....	129
3.7. Гамільтонів цикл у графі.....	130

3.8. Зважені графи та алгоритми пошуку найкоротших шляхів.....	132
3.8.1. Формулювання задач про найкоротші шляхи в графі.	
Алгоритм Дейкстри.....	132
Опис Алгоритму Дейкстри.....	134
Обґрунтування алгоритму Дейкстри.....	134
3.8.2. Алгоритм Флойда.....	136
Опис Алгоритму Флойда.....	137
3.8.3. Порівняння алгоритмів Флойда та Дейкстри.....	140
3.9. Обхід графів.....	140
3.9.1. Пошук углиб у простому зв'язному графі.....	140
Алгоритм пошуку углиб у простому зв'язному графі.....	140
3.9.2. Пошук ушир у простому зв'язному графі.....	142
Алгоритм пошуку ушир у простому зв'язному графі.....	142
3.10. Планарні графи.....	144
3.11. Розфарбування графів.....	146
3.11.1. Хроматичне число.....	146
3.11.2. Хроматичні поліноми.....	148
3.11.3. Практичні задачі, які зводяться до розфарбування графів.....	149
3.12. Незалежні множини вершин. Кліки.....	150
3.13. Паросполучення в графах. Теорема Голла.....	152
3.14. Найбільше паросполучення в двочасткових графах.....	154
Резюме.....	157
Задачі для самостійного розв'язування.....	160
Комп'ютерні проекти.....	184
РОЗДІЛ 4.	
ДЕРЕВА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.....	186
4.1. Основні означення та властивості.....	186
4.2. Рекурсія. Обхід дерев. Префіксна та постфіксна форми запису виразів.....	191
Алгоритм обходу дерева в прямому порядку – ОПП (<i>корінь</i>).....	192
Алгоритм обходу дерева у внутрішньому порядку – ОВП (<i>корінь</i>).....	192
Алгоритм обходу дерева у зворотному порядку – ОЗП (<i>корінь</i>).....	192
4.3. Бінарне дерево пошуку.....	197
Алгоритм додавання об'єкта в дерево.....	197
Алгоритм пошуку об'єкта в дереві.....	198
4.4. Дерево рішень.....	200
Алгоритм побудови дерева рішень – ID3 (<i>D, C, A</i>).....	203
4.5. Бектрекінг (пошук із поверненнями).....	208
Алгоритм побудови всіх максимальних незалежних множин вершин у простому графі $G = (V, \Gamma)$	212
4.6. Дерева та сортування.....	212
Алгоритм «Бульбашкове сортування».....	214
Алгоритм «Об'єднання двох списків».....	216

4.7. Каркаси	218
Алгоритм Краскала	221
Резюме.....	223
Задачі для самостійного розв'язування.....	225
Комп'ютерні проекти.....	234
РОЗДІЛ 5.	
ВІДНОШЕННЯ	236
5.1. Відношення та їх властивості.....	236
5.2. Відношення еквівалентності	239
5.3. Відношення часткового порядку	241
5.4. Топологічне сортування.....	243
Алгоритм топологічного сортування.....	244
5.5. Операції над відношеннями.....	246
5.6. Замикання відношень	247
Алгоритм Уоршалла	251
5.7. Бази даних і відношення	252
Резюме.....	255
Задачі для самостійного розв'язування.....	256
Комп'ютерні проекти.....	266
РОЗДІЛ 6.	
ОСНОВИ ТЕОРІЇ КОДУВАННЯ	268
6.1. Алфавітне й рівномірне кодування.....	268
6.2. Достатні умови однозначності декодування. Властивості роздільних кодів....	269
6.3. Оптимальне кодування.....	272
6.3.1. Код Фано.....	272
6.3.2. Код Гаффмана	275
6.3.3. Стиснення даних.....	278
6. 4. Коди, стійкі до перешкод	279
6.4.1. Одна схема рівномірного двійкового кодування, вплив перешкод і найпростіші способи виявлення помилок.....	279
6.4.2. Один приклад коду Геммінґа.....	281
6.4.3. Кодова віддаль. Необхідні й достатні умови виявлення та виправлення помилок у каналах зв'язку з перешкодами.....	284
6.4.4. Лінійні або групові коди	287
Резюме.....	295
Задачі для самостійного розв'язування.....	297
Комп'ютерні проекти.....	301

РОЗДІЛ 7.

БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ	302
7.1. Означення булевої функції. Реалізація функцій формулами	302
7.2. Алгебри булевих функцій	306
Закони алгебри Буля:	307
Закони алгебри Жегалкіна.	307
7.3. Спеціальні форми подання булевих функцій	309
7.3.1. Диз'юнктивні нормальні форми	309
7.3.2. Кон'юнктивні нормальні форми	312
7.3.3. Поліном Жегалкіна.....	313
7.4. Повнота та замкненість	315
7.4.1. Функціонально повні системи	316
7.4.2. Замкнені класи	316
7.4.3. Критерій функціональної повноти системи булевих функцій	320
7.4.4. Послаблена функціональна повнота.....	321
7.4.5. Передповні класи.....	322
7.5. Мінімізація булевих функцій.....	323
7.5.1. Головні результати.....	323
7.5.2. Методи побудови скороченої ДНФ	324
Алгоритм Куайна.....	325
Алгоритм Мак-Класкі	325
7.5.3. Побудова тупикових ДНФ.....	327
Алгоритм знаходження всіх тупикових ДНФ.....	328
7.5.4. Властивості скороченої ДНФ	329
7.5.5. Метод карт Карно побудови мінімальних ДНФ	329
7.6. Реалізація булевих функцій схемами з функціональних елементів	333
Резюме	338
Задачі для самостійного розв'язування	339
Комп'ютерні проекти	343

РОЗДІЛ 8.

МОВИ, ГРАМАТИКИ ТА АВТОМАТИ	344
8.1. Мови.....	344
8.2. Формальні породжувальні граматики	346
8.3. Типи граматик (ієрархія Хомського)	349
8.4. Дерева виведення.....	350
8.5. Форми Бекуса-Наура	352
8.6. Скінченні автомати з виходом.....	353
8.7. Скінченні автомати без виходу	357
8.8. Подання мов.....	361
Резюме	370
Задачі для самостійного розв'язування	372
Комп'ютерні проекти	379

РОЗДІЛ 9.

ОСНОВИ ТЕОРІЇ АЛГОРИТМІВ	380
9.1. Основні вимоги до алгоритмів	380
9.2. Машини Тьюрінга	382
9.3. Обчислення числових функцій на машинах Тьюрінга.....	387
9.4. Теза Тьюрінга. Приклади алгоритмічно нерозв'язних проблем.....	388
9.5. Рекурсивні функції	392
9.6. Теза Чорча. Зв'язок рекурсивних функцій із машинами Тьюрінга.....	396
Резюме	396
Задачі для самостійного розв'язування	397
Комп'ютерний проект	399

РОЗДІЛ 10.

КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ ТА СКЛАДНІСТЬ ОБЧИСЛЕНЬ	400
10.1. Масові задачі, алгоритми й складність	400
10.2. Задачі розпізнавання, мови та кодування.....	404
10.3. Детерміновані машини Тьюрінга й клас P	405
10.4. Недетерміновані машини Тьюрінга й клас NP	408
10.5. Поліноміальна звідність і NP -повні задачі	411
10.6. Теорема Кука.....	414
10.7. Приклади NP -повних задач. Доведення NP -повноти.....	419
Резюме	423
Задачі для самостійного розв'язування	424
АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК	425
ЛІТЕРАТУРА	430

Навчальне видання

Серія «Комп'ютинг»

**НИКОЛЬСЬКИЙ Юрій Володимирович,
ПАСІЧНИК Володимир Володимирович,
ЩЕРБИНА Юрій Миколайович**

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

П і д р у ч н и к

За науковою редакцією
доктора технічних наук, професора *В.В. Пасічника*

Видання 7-ме, виправлене та доповнене

Керівник видавничого проекту *В. М. Піча*
Дизайн обкладинки *А. В. Катренко*

Формат 70×100/16. Умовн. друк. арк. 35,10.

В и д а в е ц ь :
ПП «Магнолія 2006»
м. Львів-53, 79053, Україна, тел. +380503701957
e-mail: magnol06@ukr.net

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 2534 від 21.06.2006 року.

В и д а в е ц ь :
Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 м. Львів, 79000.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 3059 від 13.12.2007 р.

В и г о т о в л ю в а ч :
ФОП Марченко Т. В.
вул. Перфецького, 11а, м. Львів, 79053.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія ДК № 6784 від 30.05.2019 року.